ファジィ測度の不変性と従属性 (情報数理に関連する応用函数解析の研究)

本田, あおい; 岡崎, 悦明

数理解析研究所講究録
1100巻 1999年 87-93

ファジィ測度の不変性と従属性

本田あおい 岡崎悦明(九工大・情報工)

1 はじめに

ファジィ測度とは加法性をもたない集合関数である．ファジィ測度が加法性を持たないというところが，人間の主観的評価は必ずしも加法性を持たないということにマッチしており，主観的尺度の定式化の一つとして，ファジィ測度は主観的評価問題に応用されている．本稿ではファジィ測度 μ が別のファジィ測度 g と非減少関数 f の合成関数として $g=f\circ\mu$ とあらわせる条件（μ–従属性）について考察した．これに関連して，ファジィ測度の不変性を導入した．ファジィ測度の μ–従属，強 μ–不変，μ–不変を定義し，μ–従属と強 μ–不変が同値であることを示している．また，強 μ–不変であれば μ–不変であることと，μ–不変から μ–従属を導くための条件についても考察する．

2 準備

X を集合，$\mathcal{B}$ を X 上の σ–algebra とする．すなわち $\mathcal{B}$ は次を満たす．

1. $\phi, X\in\mathcal{B}$
2. $A\in\mathcal{B}$ ならば $A^c\in\mathcal{B}$
3. $A_n\in\mathcal{B}(n=1,2,\cdots)$ ならば $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{B}$

以下にファジィ測度の定義を示す.

定義 1 集合関数 $g:\mathcal{B}\to[0,1]$ が次の二つの条件を満たすとき，g をファジィ測度という.

1. $g(\phi)=0, g(X)=1$
2. $A\subset B, A, B\in\mathcal{B}$ ならば $g(A)\leq g(B)$

確率測度の定義は

定義 2 集合関数 $g:\mathcal{B}\to[0,1]$ が次の二つの条件を満たすとき，g を確率測度という.

1. $g(\phi)=0, g(X)=1$
2. $A\cap B=\phi, A, B\in\mathcal{B}$ ならば $g(A\cup B)=g(A)+g(B)$

次にファジィ測度の不変性と従属性の定義を導入する.

定義 3 g,μ をファジィ測度とする. $\mu(A)=\mu(B)(A,B\in\mathcal{B})$ ならば $g(A)=g(B)$ を満たすとき g を μ–不変という.

定義 4 g,μ をファジィ測度とする. $\mu(A)\leq\mu(B)(A,B\in\mathcal{B})$ ならば $g(A)\leq g(B)$ を満たすとき g を強 μ–不変という.

定義 5 g,μ をファジィ測度とする. g についてある非減少関数 $f:[0,1]\to[0,1]$ が存在して $g(A)=f(\mu(A))=(f\circ g)(A)\ \ \forall A\in\mathcal{B}$ とあらわされるとき g を μ–従属という.

ファジィ測度 g が μ–従属とは，g は μ から関数 f によるスケーリングを得て得られる尺度と考えることができる．関数 f は非減少であるので μ の持つ大小関係が g に遺伝しており，μ に扱いやすいファジィ測度（例えば確率測度）を持ってくれば，g も同じような性質を持つと考えることができる．これをファジィ測度の推定等に利用することができる．

次にファジィ測度の可算鎖条件を定義する．これは，確率測度の σ–aditivity に相当するものである．

定義 6　ファジィ測度 g が次の条件を満たすとき，g が可算鎖条件を満たすという．

1. $A_n \uparrow A (A_n, A \in \mathcal{B})$ ならば $g(A_n) \uparrow g(A)$
2. $A_n \downarrow A (A_n, A \in \mathcal{B})$ ならば $g(A_n) \downarrow g(A)$

g が強 μ–不変であれば，μ–不変であることを次に示す．

補題 1　g, μ をファジィ測度とする．g が強 μ–不変であれば，μ–不変である．

証明:　$\mu(A) = \mu(B)$ ならば $\mu(A) \leq \mu(B)$ かつ $\mu(A) \geq \mu(B)$．すなわち $g(A) = g(B)$ となる．

3　不変性

ここでは μ–不変から μ–従属を導くための条件について考察する．必然的に $g = f(\mu(A))$ となるような f の存在を示さなければならない．g を $\mathcal{B}$ 上に定義されたファジィ測度とする．$R(g)$ を次のようにおく．

$$R(g) = \{g(A) \mid A \in \mathcal{B}\} \subset [0, 1]$$

g が μ–不変であれば関数 f は μ–不変性より

$$f : R(\mu) \to R(g), f(\mu(A)) = g(A)$$

と定義できる．従属性を示すにはこのようにして A 上で定義された関数 f が非減少であることを示すと同時に，$f : [0,1] \to [0,1]$ に拡張する必要がある．

定理 1 g が強 μ–不変であると g が μ–従属であるは同値である．

証明: 関数 f を上記のように $f : R(\mu) \to R(g), f(\mu(A)) = g(A)$ と定義する．g の強 μ–不変性より f は $R(\mu)$ 上では非減少である．これを次のように $f : [0,1] \to [0,1]$ に拡張する．

$$\begin{aligned} f(t) &= \inf\{f(\mu(A)) \mid t \leq \mu(A), A \in \mathcal{B}\} \\ &= \inf\{f(s) \mid t \leq s, s \in R(\mu)\} \quad \textit{for each } t \in [0,1] \end{aligned}$$

f は非減少かつ，すべての $A \in \mathcal{B}$ について $g(A) = f(\mu(A))$

次に μ–不変から μ–従属を導くための条件を考察する．結論を言えば μ–不変な g が次の性質を持てば，μ–従属となる．

定義 7 μ が次の性質を持つときに μ は Darboux property を持つという．$s < t$ なる任意の $s, t \in R(\mu)$ に対して $s = \mu(A), t = \mu(B)$ である $A, B \in \mathcal{B}$ が $A \subset B$ととれる．

補題 2 μ が Darboux property を持ち，可算鎖条件を満たすとき，$R(\mu)$ は $[0,1]$ で閉区間となる．

定理 2 ファジィ測度 μ が Darboux property を持つと仮定する．このときファジィ

測度 g が μ–不変なら g は μ–従属となる．

証明: 上記のように $A \in \mathcal{B}$ 上で f を定義する．μ–不変性より f は well–defined である．次に f が非減少であることを示す．

$$\forall s, t \in R(\mu), s < t$$

仮定より μ は Darboux property を持つので

$$\exists A, B \in \mathcal{B}, A \subset B$$

$$s = \mu(A), t = \mu(B)$$

$$\to f(s) = g(A) \leq g(B) = f(t)$$

定理 1 と同様に $f : [0,1] \to [0,1]$ に非減少に拡張できる．　(証明終)

次に関数 f が連続にとれるための条件について考察する．

定義 8 μ が次の性質を持つときに μ は強–Darboux property を持つという．

1. $s < t$ なる任意の $s, t \in R(\mu)$,$s = \mu(A)$ となる任意の $A \in \mathcal{B}$ に対して、$\mu(C) = t, C \supset A$ となる $C \in \mathcal{B}$ がとれる．
2. $s < t$ なる任意の $s, t \in R(\mu)$,$t = \mu(B)$ となる任意の $B \in \mathcal{B}$ に対して、$\mu(D) = s, B \supset D$ となる $D \in \mathcal{B}$ がとれる．

定理 3 σ–algebra $\mathcal{B}$ 上の二つのファジィ測度 g, μ が可算鎖条件を満たし，μ が強–Darboux property を持つとする．このとき g が μ–不変なら g は μ–従属となる．さらに，このとき非減少関数 f は連続にとれる．

4 Darboux property

確率測度の場合 non-atomic　σ–aditive な確率測度は強–Darboux property を持つ．ここではファジィ測度の場合を考察する．まず，ファジィ測度の零集合の定義が必要である．

定義 9　μ を $\mathcal{B}$ 上の σ–algebra とする．μ を $\mathcal{B}$ 上の σ–algebra とする．$N \subset \mathcal{B}$ が全ての $A \in \mathcal{B}$ に対して $\mu(A \cup N) = \mu(A)$ となるとき，N を μ–零集合という．([3])

定義 10 μ を σ–algebra $\mathcal{B}$ 上のファジィ測度とする．E が次の条件を満たすとき E を atom という

1. μ–零集合ではない．
2. 任意の $C \subset E, C \in B$ に対して，$\mu(U \cup C) = \mu(U)$ or $\mu(U \cup C) = \mu(U \cup E)$

μ が確率測度であれば atom の定義は定義 10 の条件 2 が $\mu(C) = 0$　*or*　$\mu(C) = \mu(E)$ となる．

定義 11　μ を σ–algebra $\mathcal{B}$ 上のファジィ測度とする．$\mathcal{B}$ に atom が存在しないとき μ は non-atomic であるという

定理 4　μ を σ–algebra $\mathcal{B}$ 上のファジィ測度とする．μ が non-atomic かつ可算鎖条件を満たすとき，μ は強–Darboux property を持つ．

定理 4 はさらに強く次がいえる．

1. $\forall A \in \mathcal{B}, \forall \alpha \geq \mu(A)$ に対し

$$\exists C \in \mathcal{B}, C \supset A, \mu(C) = \alpha$$

2. $\forall B \in \mathcal{B}, \forall \beta \geq \mu(B)$ に対し

$$\exists D \in \mathcal{B}, D \subset B, \mu(D) = \beta$$

.

5 確率の場合

定理 5 g, μ を σ–algebra $\mathcal{B}$ 上の σ–加法的確率とする．g, μ が non-atomic かつ g は μ–不変とすると，このとき $g = \mu$ である．

References

[1] N.Dinculeanu, Vector Measures, Pergamon Press, Oxford, London, Edinburgh, 1967

[2] P.R.Halmos, Measure Theory, Van Nostrand Company, New York, 1969

[3] 菅野道夫 and 室伏俊明, ファジィ測度、日刊工業新聞社 (1993)

[3] A.Honda and Y.Okazaki, Invariance of Fuzzy Measure, Bulletin of the Kyushu Institute of Technology.Pure and Applied Mathematics No.46, pp.1–8, 1999